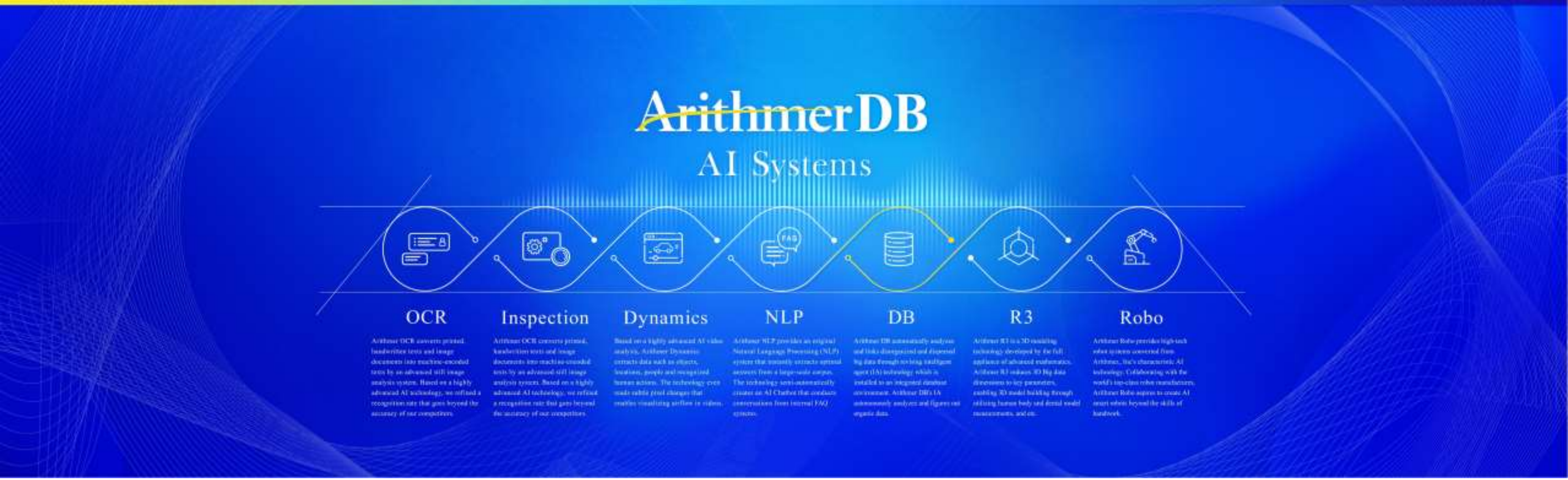



# 算数で体感する高度数学

Chikashi ARITA (Arithmer)

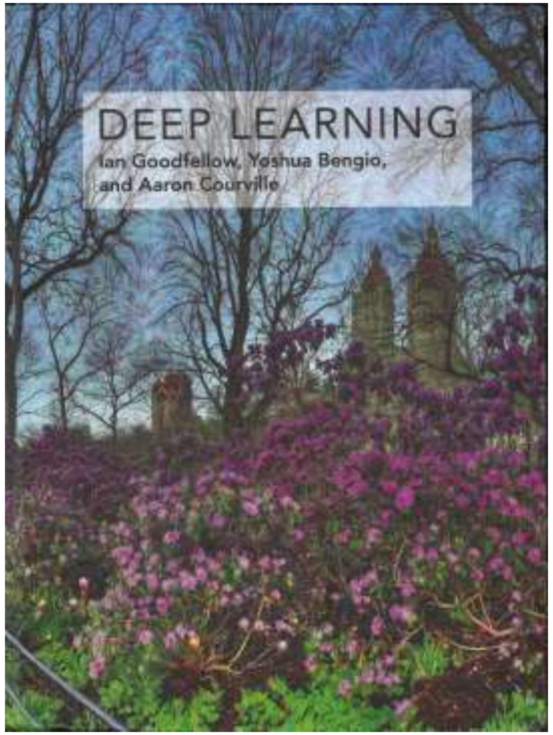
2019/08/08

# 自己紹介

## 有田 親史

2008年、東京大学大学院理学研究科博士課程修了（理学博士）。これまでに九州大学、フランス・サクレー研究所、ドイツ・ザールラント大学で研究と教育に従事。数学を実社会に真に生かすため、2018年Arithmerに入社。

# 高度数学は難しい




$$\frac{\partial}{\partial \hat{h}_i}\mathcal{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{h}}) \tag{19.38}$$

シグマ記号（和）　対数

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{h}_i}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\Big[\hat{h}_j(\log\sigma(b_j) - \log\hat{h}_j) + (1-\hat{h}_j)(\log\sigma(-b_j) - \log(1-\hat{h}_j))\Big] \tag{19.39}$$

括弧（計算順序）

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big[\log\frac{\beta_j}{2\pi} - \beta_j\Big(v_j^2 - 2v_j\boldsymbol{W}_{j,:}\hat{\boldsymbol{h}} + \sum_k\Big[W_{j,k}^2\hat{h}_k + \sum_{l\neq k}W_{j,k}W_{j,l}\hat{h}_k\hat{h}_l\Big]\Big)\Big]\Bigg] \tag{19.40}$$

分数　円周率　行列とベクトル

$$= \log\sigma(b_i) - \log\hat{h}_i - 1 + \log(1-\hat{h}_i) + 1 - \log\sigma(-b_i) \tag{19.41}$$

引き算　足し算

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[\beta_j\Big(v_jW_{j,i} - \frac{1}{2}W_{j,i}^2 - \sum_{k\neq i}\boldsymbol{W}_{j,k}\boldsymbol{W}_{j,i}\hat{h}_k\Big)\Big] \tag{19.42}$$

二乗

$$= b_i - \log\hat{h}_i + \log(1-\hat{h}_i) + \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{W}_{:,i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{W}_{:,i}^\top\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{W}_{:,i} - \sum_{j\neq i}\boldsymbol{W}_{:,j}^\top\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{W}_{:,i}\hat{h}_j. \tag{19.43}$$

転置

弊社は「高度数学」を活用したAI技術を生み出しています。しかし高度数学を理解するのは一般には簡単ではないでしょう。例えば上の本のあるページを見てみましょう。小学生で習う足し算引き算から微分や行列といった事項を積み上げ式に習得しておかなければならないことに気付きます。

[I Goodfellow, Y Bengio, and A Courville: Deep Learning (2016)]

Arithmer

# 今日の話題

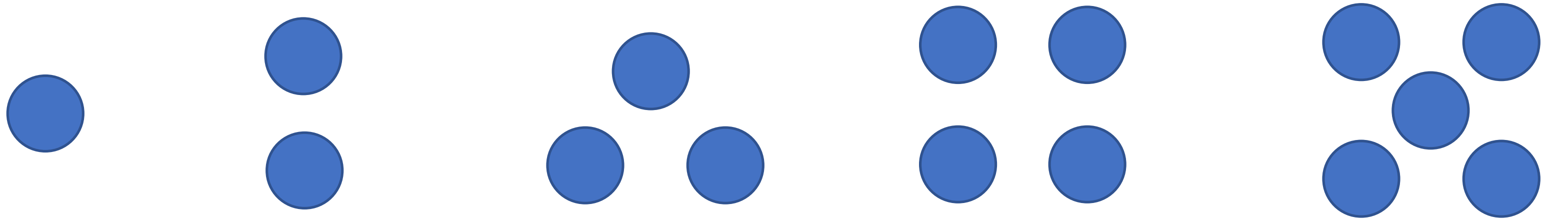

今日のお話しでは、ちょっとずるをして、不思議な高度数学の世界を垣間見てみたいと思います。

ほんの少し算数の範囲を逸脱しますが、サインコサインも微分積分も使いません。

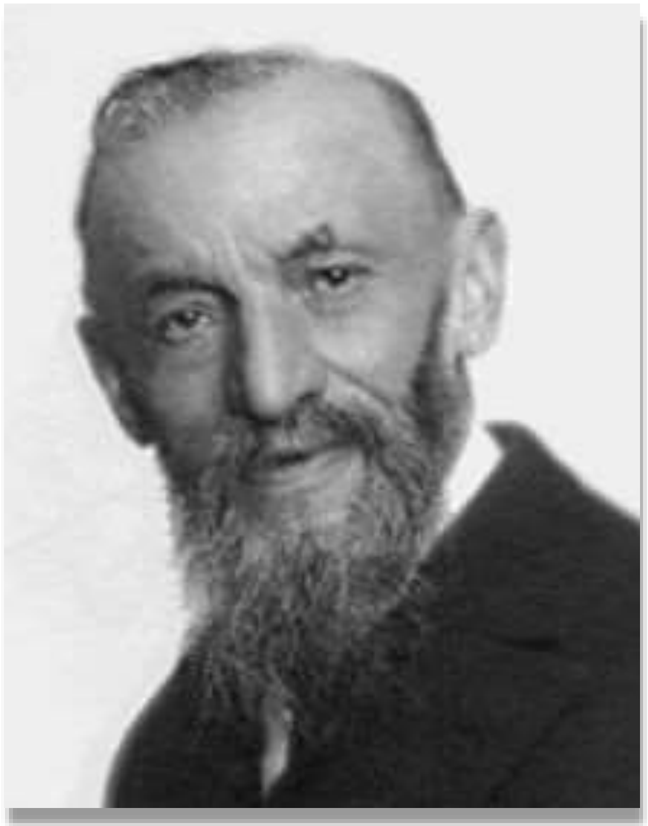
Arithmer

# 自然数 1, 2, 3, 4, 5, ...





- 地球上の多くの人々に自然数の概念が理解され使われている。
- 0（ゼロ）を含めるかどうかは流儀に依るが、ここでは含めない。
- 公理論的な定義はイタリアの数学者ペアノによって与えられた。
- 自然数全体の集合は$\mathbb{N}$で表され、その濃度は$\aleph_0$と書かれる。



Giuseppe Peano （1858-1932）

# 自然数の和



$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

# ピタゴラス学派の方法を使った計算



$$1+2+3+4+5+\cdot\cdot\cdot+9+10=10\times11\div2=55$$

$$1+2+3+4+5+\cdot\cdot\cdot+99+100=100\times101\div2=5050$$

$$1+2+3+4+5+\cdot\cdot\cdot+2018+2019=2019\times2020\div2=2039190$$

$$1+2+3+4+5+\cdot\cdot\cdot+9999+10000=10000\times10001\div2=50005000$$

問　$1+2+3+4+5+\cdot\cdot\cdot=?$

# 自然数の総和



$$\boxed{1+2+3+4+5+\cdots=-\frac{1}{12}}$$

- リーマンゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$$

の特殊値の一つ。ちなみにリーマン予想を解決すれば100万ドルが貰える。

- 映画にもなったラマヌジャンにはこの公式が直観的に見えたのだろうか。

Georg Friedrich Bernhard Riemann （1826-1866）

Srinivasa Ramanujan （1887-1920）

イタリアの修道士、哲学者、数学者ルイージ・グイード・グランディにより考察された級数（1703）

$$G = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
$$G = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)$$
$$G = 1 - G$$
$$G + G = 1 - G + G$$
$$2 \times G = 1$$
$$G = \frac{1}{2}$$

Luigi Guido Grandi（1671-1742）

# 交代級数（の一つ） 1 − 2 + 3 − 4 + 5 − 6 + 7・・・



18世紀にオイラーによりその「値」が発見された。

$$E = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots$$

$$2 \times E = (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots) + (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots)$$

$$2 \times E = 1 + (-2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots) + 1 - 2 + (3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots)$$

$$2 \times E = (-2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots) + (3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots)$$

$$2 \times E = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$2 \times E = G$$

$$E = \frac{G}{2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

Leonhard Euler （1707-1783）

# ラマヌジャンによる「証明」



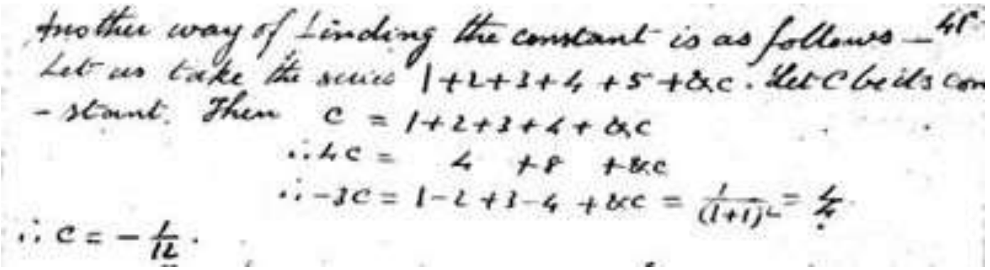
$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \cdots$$

$$4 \times C = \quad 4 \quad + 8 \quad +12 \quad +16 \quad + 20 + \cdots$$

$$-3 \times C = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + \cdots$$

$$-3 \times C = E$$

$$C = -\frac{E}{3} = -\frac{1}{3 \times 4} = -\frac{1}{12}$$



Another way of finding the constant is as follows —
Let us take the series 1+2+3+4+5+&c. Let C be its con-
-stant. Then C = 1+2+3+4+&c
∴ 4C = 4 +8 +&c
∴ −3C = 1−2+3−4+&c = 1/(1+1)² = 1/4
∴ C = −1/12.

ラマヌジャン直筆のノート

# 自然数の分割



ある自然数 $n$ の分割とは、$n$ をいくつかの自然数の和として書くことである。
（ただし大きい順に並べる。）

例えば

$5 = 3 + 2$

● ● ●|● ●

$10 = 6 + 2 + 1 + 1$

● ● ● ● ● ●|● ●|●|●

$17 = 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2$

● ● ● ● ●|● ● ●|● ● ●|● ●|● ●|● ●

# 異なる自然数への分割



$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ &= 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 6 \\ &= 5 + 1 \\ &= 4 + 2 \\ &= 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \\ &= 6 + 1 \\ &= 5 + 2 \\ &= 4 + 3 \\ &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 7 + 1 \\ &= 6 + 2 \\ &= 5 + 3 \\ &= 5 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 &= 9 \\ &= 8 + 1 \\ &= 7 + 2 \\ &= 6 + 3 \\ &= 6 + 2 + 1 \\ &= 5 + 4 \\ &= 5 + 3 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 10 \\ &= 9 + 1 \\ &= 8 + 2 \\ &= 7 + 3 \\ &= 7 + 2 + 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 6 + 3 + 1 \\ &= 5 + 4 + 1 \\ &= 5 + 3 + 2 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

# 異なる自然数への分割の個数 $a_n$



$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ &= 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 6 \\ &= 5 + 1 \\ &= 4 + 2 \\ &= 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \\ &= 6 + 1 \\ &= 5 + 2 \\ &= 4 + 3 \\ &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ &= 7 + 1 \\ &= 6 + 2 \\ &= 5 + 3 \\ &= 5 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 &= 9 \\ &= 8 + 1 \\ &= 7 + 2 \\ &= 6 + 3 \\ &= 6 + 2 + 1 \\ &= 5 + 4 \\ &= 5 + 3 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 10 \\ &= 9 + 1 \\ &= 8 + 2 \\ &= 7 + 3 \\ &= 7 + 2 + 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 6 + 3 + 1 \\ &= 5 + 4 + 1 \\ &= 5 + 3 + 2 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 4,\ a_7 = 5,\ a_8 = 6,\ a_9 = 8,\ a_{10} = 10$$

# 奇自然数（２で割ると１余る自然数）への分割



1 = 1

2 = 1+1

3 = 3
= 1+1+1

4 = 3+1
= 1+1+1+1

5 = 5
= 3+1+1
= 1+1+1+1+1

6 = 5+1
= 3+3
= 3+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1

7 = 7
= 5+1+1
= 3+3+1
= 3+1+1+1+1
=
1+1+1+1+1+1+1

8 = 7+1
= 5+3
= 5+1+1+1
= 3 + 3+1+1
= 3+1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1+1+1

9 = 9
= 7+1+1
= 5+3+1
= 5+1+1+1+1
= 3+3+3
= 3+3+1+1+1
= 3+1+1+1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

10 = 9+1
= 7+3
= 7+1+1+1
= 5+5
= 5+3+1+1
= 5+1+1+1+1+1
= 3+3+3+1
= 3+3+1+1+1+1
= 3+1+1+1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

# 奇自然数への分割の個数 $b_n$



$1 = 1$

$2 = 1+1$

$3 = 3$
$\quad = 1+1+1$

$4 = 3+1$
$\quad = 1+1+1+1$

$5 = 5$
$\quad = 3+1+1$
$\quad = 1+1+1+1+1$

$6 = 5+1$
$\quad = 3+3$
$\quad = 3+1+1+1$
$\quad = 1+1+1+1+1+1$

$7 = 7$
$\quad = 5+1+1$
$\quad = 3+3+1$
$\quad = 3+1+1+1+1$
$\quad =$
$1+1+1+1+1+1+1$

$8 = 7+1$
$\quad = 5+3$
$\quad = 5+1+1+1$
$\quad = 3 + 3+1+1$
$\quad = 3+1+1+1+1+1$
$\quad = 1+1+1+1+1+1+1+1$

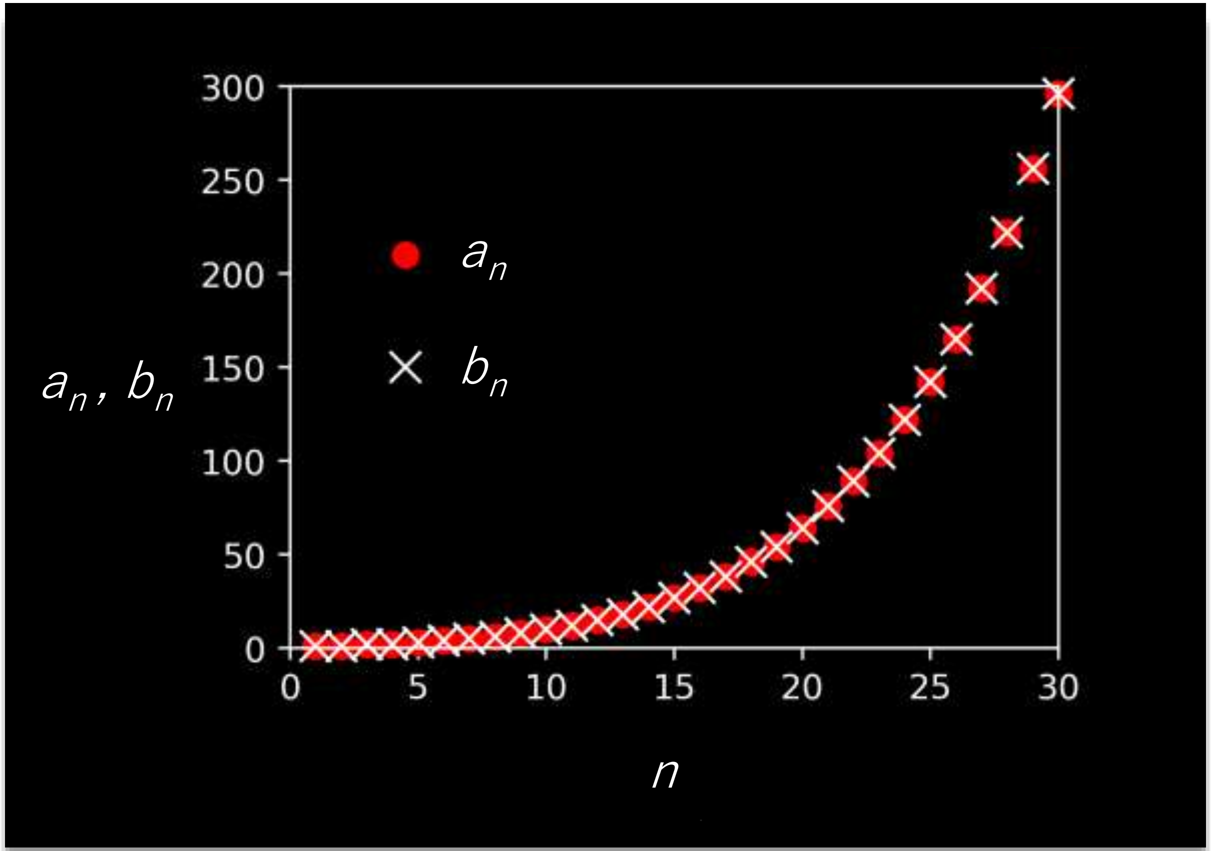
$9 = 9$
$\quad = 7+1+1$
$\quad = 5+3+1$
$\quad = 5+1+1+1+1$
$\quad = 3+3+3$
$\quad = 3+3+1+1+1$
$\quad = 3+1+1+1+1+1+1$
$\quad = 1+1+1+1+1+1+1+1+1$

$10 = 9+1$
$\quad = 7+3$
$\quad = 7+1+1+1$
$\quad = 5+5$
$\quad = 5+3+1+1$
$\quad = 5+1+1+1+1+1$
$\quad = 3+3+3+1$
$\quad = 3+3+1+1+1+1$
$\quad = 3+1+1+1+1+1+1+1$
$\quad = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2,\ b_5 = 3,\ b_6 = 4,\ b_7 = 5,\ b_8 = 6,\ b_9 = 8,\ b_{10} = 10$

# オイラーの分割恒等式






すべての自然数 $n$ について、異なる自然数への分割の個数 $a_n$ と奇自然数への分割の個数 $b_n$ は等しい。

# オイラー



レオンハルト・オイラー　（スイス）

- 解析、数論、幾何、理論物理に多大な影響を及ぼした。
- 分割恒等式以外にも「オイラー○○」を挙げる切りがない。

  オイラーの等式

  オイラーの一筆書き定理など。
- 関数の記法 $y = f(x)$ を導入。
- 両目の視力を失っても研究意欲が衰えることなく

  人類史上最も多くの論文を書いたとされる。（5万ページ以上。）

Leonhard Euler（1707-1783）

# 異なる自然数への分解の個数 $a_n$ の母関数 $A$



$$(1+q^1)\times(1+q^2)\times(1+q^3)\times(1+q^4)\times(1+q^5)\times$$

$$=(1+q^1+q^2+q^{2+1})\times(1+q^3)\times(1+q^4)\times(1+q^5)\times$$

$$=(1+q^1+q^2+q^{2+1}+q^3+q^{3+1}+q^{3+2}+q^{3+2+1})\times(1+q^4)\times(1+q^5)$$

$$=(1+q^1+q^2+q^{2+1}+q^3+q^{3+1}+q^{3+2}+q^{3+2+1}$$

$$+q^4+q^{4+1}+q^{4+2}+q^{4+2+1}+q^{4+3}+q^{4+3+1}+q^{4+3+2}+q^{4+3+2+1})\times(1+q^5)$$

$$q^1+q^2+(q^3+q^{2+1})+(q^4+q^{3+1})+(q^5+q^{4+1}+q^{3+2})+$$

$$q^1+1\,q^2+2\,q^3+2\,q^4+3\,q^5+$$

$$=1+a_1\,q+a_2\,q^2+a_3\,q^3+a_4\,q^4+a_5\,q^5+\cdots$$

したがって　$A=(1+q^1)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)$

# 奇自然数への分解の個数 $b_n$ の母関数 $B$

$$(1+q^1+q^{1+1}+q^{1+1+1}+\cdots)\times(1+q^3+q^{3+3}+q^{3+3+3}+\cdots)$$
$$\times(1+q^5+q^{5+5}+q^{5+5+5}+\cdots)\times(1+q^7+q^{7+7}+q^{7+7+7}+\cdots)\times\cdots$$
$$q^1+q^{1+1}+(q^3+q^{1+1+1})+(q^{3+1}+q^{1+1+1+1})+(q^5+q^{3+1+1}+q^{1+1+1+1+1})+$$
$$q^1+1q^2+2q^3+2q^4+3q^5+$$
$$1+b_1q+b_2q^2+b_3q^3+b_4q^4+b_5q^5+\cdots$$

したがって

$$B=(1+q^1+q^{1+1}+q^{1+1+1}+\cdots)\times(1+q^3+q^{3+3}+q^{3+3+3}+\cdots)$$
$$\times(1+q^5+q^{5+5}+q^{5+5+5}+\cdots)\times(1+q^7+q^{7+7}+q^{7+7+7}+\cdots)\times\cdots$$
$$=(1+q^1+q^2+q^3+\cdots)(1+q^3+q^6+q^9+\cdots)(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\cdots)(1+q^7+\cdots)\cdots$$
$$=\frac{1}{1-q^1}\frac{1}{1-q^3}\frac{1}{1-q^5}\frac{1}{1-q^7}\cdots$$

# 分割恒等式 $a_n = b_n$ の証明

$A = B$ すなわち

$$(1+q^1)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots = \frac{1}{1-q^1}\,\frac{1}{1-q^3}\,\frac{1}{1-q^5}\,\frac{1}{1-q^7}\cdots$$

を示せばよい。

$$左辺 = \frac{(1+q^1)(1-q^1)(1+q^2)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^3)(1+q^4)(1-q^4)\cdots}{(1-q^1)\qquad(1-q^2)\qquad(1-q^3\qquad(1-q^4)\cdots}$$

$$= \frac{\cancel{(1-q^2)}\qquad\cancel{(1-q^4)}\qquad\cancel{(1-q^6)}\qquad\cancel{(1-q^8)}\cdots}{(1-q^1)\cancel{(1-q^2)}(1-q^3)\cancel{(1-q^4)}(1-q^5)\cancel{(1-q^6)}(1-q^7)\cancel{(1-q^8)}\cdots}$$

$$= \frac{1}{(1-q^1)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots} = 右辺$$

# まとめ

高度数学における二つの公式

- 自然数の総和

$$1+2+3+4+5+\cdots=-\frac{1}{12}$$

- オイラーの分割恒等式

$$a_n=b_n$$

を証明しました。


**Arithmer 株式会社**
〒106-6040
東京都港区六本木一丁目 6 番 1 号 泉ガーデンタワー 38/40F( 受付 )
03-5579-6683
https://arithmer.co.jp/